2.3.20 Grafické řešení soustav lineárních rovnic a nerovnic

Předpoklady: 2307, 2311

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{array}{r} x+y=4 \\ 2x-y=5 \end{array}$. Pokus se také o grafické řešení.

Tak jednoduchou soustavu už jsme dlouho neměli:

$$\begin{array}{l} x+y=4 \\ 2x-y=5 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & x+y=4 \\ [\![1]\!]+[\![2]\!] & 3x=9 \\ \hline \end{array}$$

$x=3$

Dosadíme do první rovnice: $x+y=4 \Rightarrow 3+y=4 \Rightarrow y=1$

$K=[3;1]$

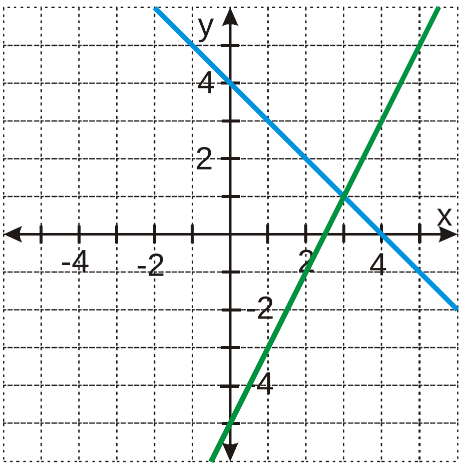
V nadpisu je ale grafické řešení. Jak graficky?

Každá rovnice – nekonečně mnoho řešení (uspořádaných dvojic čísel, kreslili jsme je jako grafy funkcí).

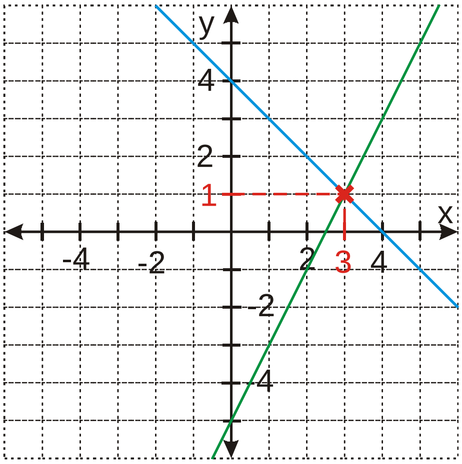
Řešení soustavy = řešení (dvojice), které je společné.

Řešení první rovnice : $x+y=4 \Rightarrow y=4-x$ - nakreslíme funkci $y=4-x$.

Řešení druhé rovnice : $2x-y=5 \Rightarrow y=2x-5$ - nakreslíme funkci $y=2x-5$.



Společné řešení = místo, kde se přímky protínají.



Řešením soustavy jsou souřadnice průsečíku obou přímek (bod $[3;1]$) $\Rightarrow K = \{[3;1]\}$.

Pedagogická poznámka: Grafické řešení není součástí předchozího příkladu schválně. Jen málokdy někdo objeví tento postup v únosné formě. Přesto se vyplatí nechat rychlejším alespoň chvíli na to, aby se o grafické řešení pokusili. Každopádně se musí provést pro celou třídu na tabuli.

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} x+2y&=4 \\ 2x+4y&=4 \end{aligned}$. Soustavu nejdříve vyřeš početně, poté odhadni, jaké bude grafické řešení, a nakonec svůj odhad ověř sestrojením grafického řešení.

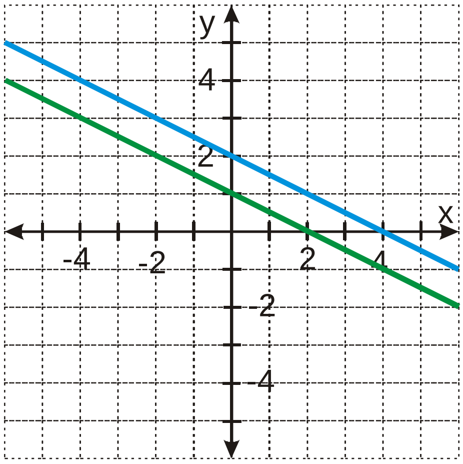
$$\begin{aligned} x+2y&=4 \\ 2x+4y&=4 \quad /:2 \end{aligned}$$

$\begin{aligned} x+2y&=4 \\ x+2y&=2 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ podmínky v obou rovnicích si odporují, nemusíme dál pokračovat, soustava nemá řešení

Soustava nemá řešení $\Rightarrow$ na obrázku by neměl být žádný průsečík $\Rightarrow$ oba grafy budou zřejmě rovnoběžné přímky

Řešení první rovnice : $x+2y=1 \Rightarrow y=2-\frac{x}{2}$ - nakreslíme funkci $y=2-\frac{x}{2}$.

Řešení druhé rovnice : $2x+4y=4 \Rightarrow y=1-\frac{x}{2}$ - nakreslíme funkci $y=1-\frac{x}{2}$.



Přímky se neprotínají $\Rightarrow$ soustava nemá řešení. $K = \emptyset$

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{matrix}$. Soustavu nejdříve vyřeš početně, poté odhadni, jaké bude grafické řešení, a nakonec svůj odhad ověř sestrojením grafického řešení.

$$2x - y = 1$$
$$4x - 2y = 2 \qquad / : 2$$

$$\begin{matrix} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{matrix}$$ $\Rightarrow$ podmínky jsou v obou rovnicích stejné $\Rightarrow$ fakticky jde o jedinou rovnici se dvěma neznámými $\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení

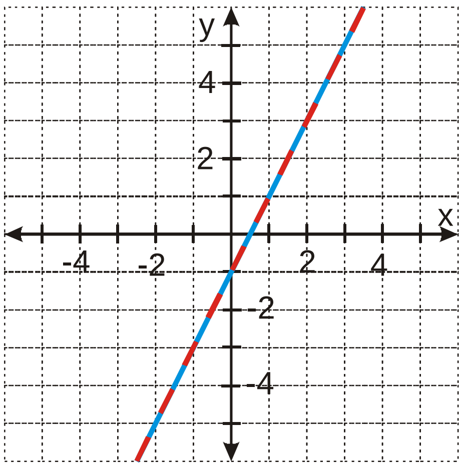
volíme *x*, dopočítáváme *y*: $y = 2x - 1$

$K = \{[x; 2x-1], x \in R\}$

$\Rightarrow$ na obrázku budou dvě totožné přímky

Řešení první rovnice : $2x - y = 1 \Rightarrow y = 2x - 1$ - nakreslíme funkci $y = 2x - 1$.

Řešení druhé rovnice : $4x - 2y = 2 \Rightarrow y = 2x - 1$ - nakreslíme funkci $y = 2x - 1$.



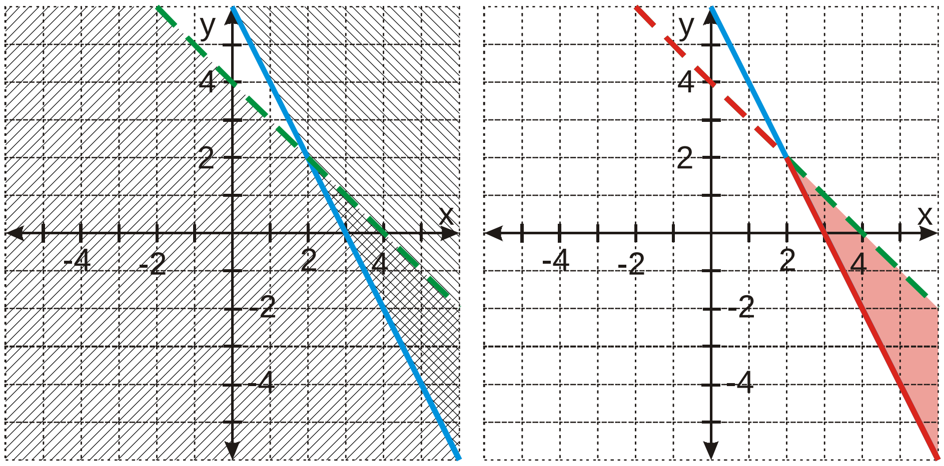
Přímky jsou totožné $\Rightarrow$ řešením soustavy je každý jejich bod.

$K = \{[x; 2x-1]; x \in R\}$

Př. 4: Vyřeš graficky soustavu nerovnic $\begin{matrix} 2x+y \geq 6 \\ x+y<4 \end{matrix}$.

Stejně jako u rovnic zobrazíme každou zvlášť, řešením jsou společné body.

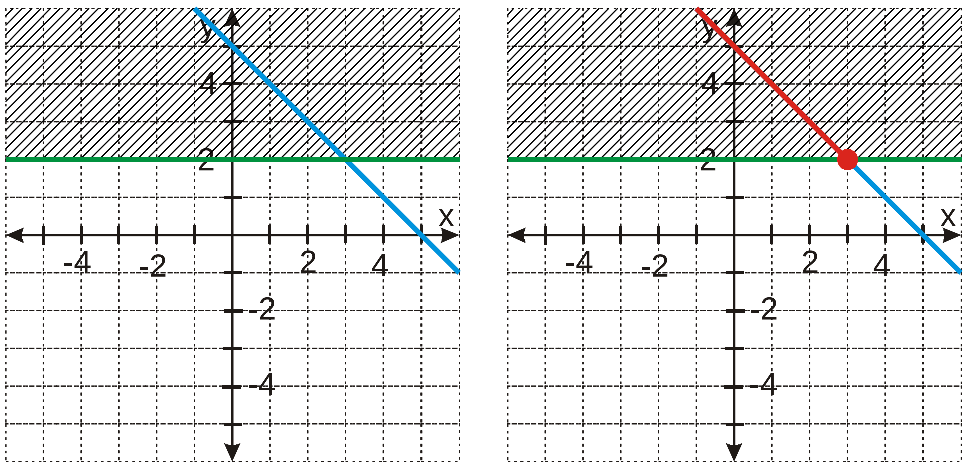
Řešení první nerovnice : $2x+y \geq 6 \Rightarrow y \geq 6-2x$ - použijeme funkci $y=6-2x$.
Řešení druhé nerovnice : $x+y<4 \Rightarrow y<4-x$ - použijeme funkci $y=4-x$.



Pedagogická poznámka: Největším problémem při řešení příkladu není ani tak příklad sám, jako fakt, že plocha průniku je poměrně malá a grafy funkcí se od sebe příliš neliší. Pokud pak studenti nekreslí příliš pečlivě, nebo mají příliš malý obrázek, stává se, že se nedokáží zorientovat. Pro mě je to záměr a chci, aby obrázek, když mají problémy, předělali do stavu, ze kterého je možné něco zjistit.

Př. 5: Vyřeš graficky soustavu rovnice a nerovnice $\begin{matrix} x+y=5 \\ y-2 \geq 0 \end{matrix}$.

Úplně stejný postup jako předtím.
Řešení první rovnice : $x+y=5 \Rightarrow y=5-x$ - použijeme funkci $y=5-x$.
Řešení druhé nerovnice : $y \geq 2$ - použijeme funkci $y=2$.



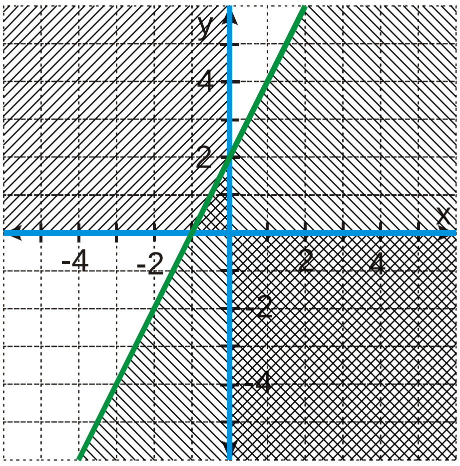
Pedagogická poznámka: Předchozí příklad testuje, zda se studenti drží více pravidla o průniku, nebo „pravidla“, že se vždycky musí vyšrafovat nějaká plocha.

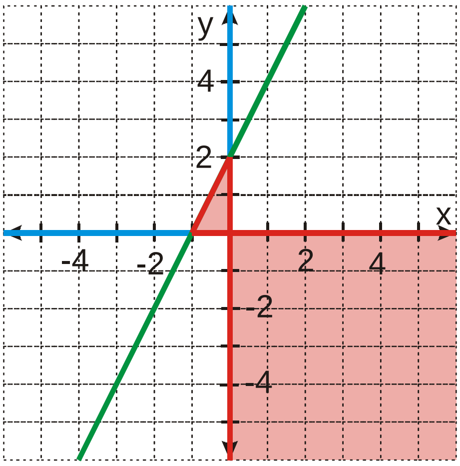
Hodina se zvrhává v kreslení obrázků:

Př. 6: Vyřeš graficky soustavu nerovnic $\begin{matrix} xy \le 0 \\ 2x - y \ge -2 \end{matrix}$.

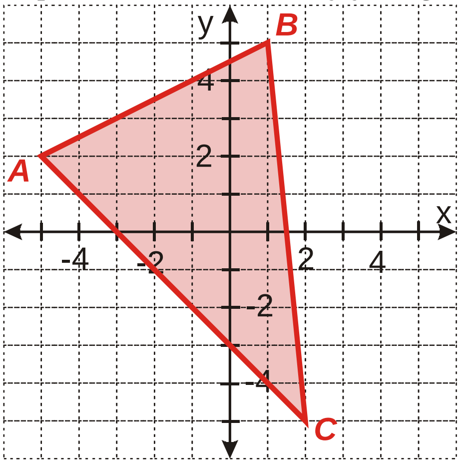
Řešení první nerovnice : nejde o lineární funkci $\Rightarrow$ musíme jinak, $xy \le 0$ $\Rightarrow$ hledáme body, jejichž souřadnice nemají stejná znaménka (aby součin souřadnic byl záporný) $\Rightarrow$ vybarvíme druhý a čtvrtý kvadrant včetně os.

Řešení druhé nerovnice : $2x - y \ge -2 \Rightarrow y \le 2x + 2$ - použijeme funkci $y = 2x + 2$.





Př. 7: Napiš soustavu nerovnic, jejímž grafickým řešením je trojúhelník na obrázku.



Obrácený postup než předtím.
Každá ze stran trojúhelníka se dá vyjádřit pomocí lineární funkce. Z nich určíme odpovídající lineární nerovnice se dvěma neznámými.

Strana *AB*

Souřadnice $A[-5;2]$, $B[1;5]$.

Dosadíme do předpisu lineární funkce: $y = ax + b$

Bod $A[-5;2] \Rightarrow 2 = a(-5) + b$

Bod $B[1;5] \Rightarrow 5 = a \cdot 1 + b$

Řešíme soustavu:
$$\begin{array}{rl} -5a+b=2 & \\ a+b=5 & \\ \hline & a+b=5 \\ [\![2]\!]-[\![1]\!] & 6a=3 \end{array} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

Vypočteme b: $\underline{a+b=5 \Rightarrow \frac{1}{2}+b=5 \Rightarrow b=\frac{9}{2}}$

Získáváme funkci: $y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} \Rightarrow 2y=x+9$

Rovnice přímky *AB*: $2y=x+9$

Do trojúhelníku patří i body pod touto přímkou: $2y \le x+9$

Po úpravě $x-2y+9 \ge 0$.

Strana *BC*

Souřadnice $B[1;5]$, $C[2;-5]$.

Dosadíme do předpisu lineární funkce: $y=ax+b$

Bod $B[1;5] \Rightarrow 5=a\cdot 1+b$

Bod $C[2;-5] \Rightarrow -5=a\cdot 2+b$

Řešíme soustavu:
$$\begin{array}{rl} a+b=5 & \\ 2a+b=-5 & \\ \hline & a+b=5 \\ [\![2]\!]-[\![1]\!] & a=-10 \end{array} \Rightarrow a=-10$$

Vypočteme b: $\underline{a+b=5 \Rightarrow -10+b=5 \Rightarrow b=15}$

Získáváme funkci: $y=-10x+15$

Rovnice přímky *BC*: $y=-10x+15$

Do trojúhelníku patří i body pod touto přímkou: $y \le -10x+15$

Po úpravě $10x+y-15 \le 0$.

Strana *AC*

Souřadnice $A[-5;2]$, $C[2;-5]$.

Dosadíme do předpisu lineární funkce: $y=ax+b$

Bod $A[-5;2] \Rightarrow 2=a(-5)+b$

Bod $C[2;-5] \Rightarrow -5=a\cdot 2+b$

Řešíme soustavu:
$$\begin{array}{rl} -5a+b=2 & \\ 2a+b=-5 & \\ \hline & -5a+b=2 \\ [\![2]\!]-[\![1]\!] & 7a=-7 \end{array} \Rightarrow a=-1$$

Vypočteme b: $\underline{-5a+b=2 \Rightarrow -5(-1)+b=2 \Rightarrow b=-3}$

Získáváme funkci: $y=-x-3$

Rovnice přímky *AC*: $y=-x-3$

Do trojúhelníku patří i body nad touto přímkou: $y \ge -x-3$

Po úpravě $x+y+3 \ge 0$.

Trojúhelník na obrázku je grafickým řešení soustavy tří nerovnic:

$$\begin{aligned} x-2y+9 &\geq 0 \\ 10x+y-15 &\leq 0 \\ x+y+3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Př. 8: Petáková:
strana 128/cvičení 74 b) d) e) f)

Shrnutí: